הוכחות:

1. נתונות 6 נקודות במישור, כך שאין שלוש נקודות על ישר אחד. בהינתן קו מחבר בין כל זוג נקודות, וכל קו צבוע באחד משני צבעים, חייב להיווצר לפחות משולש אחד מונוכרומטי.
הוכחה: נבחר נקודה כלשהי x ונחבר אותה ל-5 הנקודות האחרות. לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות 3 קווים בצבע זהה, ונסמנם: xa, xb, xc. על מנת שלא יווצר משולש מונוכרומטי שכולל את הנקודה x, הקווים בין הנקודות a, b, c חייבים להיות בצבע השני, וזה יוצר משולש מונוכרומטי.

2. מבין המספרים $\{1, 2, \ldots, 200\}$ נבחר 101 מספרים. בין מספרים אלו חייבים להיות שניים כך שאחד מחלק את השני ללא שארית.
הוכחה: כל מספר ניתן להציג כך: $2^i \cdot a$, כאשר $0 \leq i$ ו-a אי זוגי כלשהו. בקבוצת המספרים הנתונה יש לנו בסך הכל 100 מספרים אי זוגיים. בחרנו 101 מספרים בסך הכל, ולכן שניים מהם חייבים להיות בעלי אותו a, נסמנם: $x_1 = 2^i \cdot a,\ x_2 = 2^j \cdot a$. נניח ש-$i > j$ ואז מתקבל ש-x_1 מחלק את x_2.

3. המקדמים הבינומים הם סימטרים - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
הוכחה: האיבר השמאלי הוא מספר האפשרויות לבחור ועד בן k אנשים מתוך כיתה של n אנשים. האיבר הימני הוא מספר האפשרויות לבחור את האנשים שאינם בועד.ההוכחה האלגברית טריוויאלית - פתיחת הביטוי.

4.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

הוכחה: צד ימין הוא מספר כל תתי הקבוצות של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$. נתבונן באיבר השמאלי: עבור k כלשהו, זהו מספר כל תתי הקבוצות בגודל k של הקבוצה הנ"ל. יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור k איברים. ניתן להוכיח אלגברית ע"י הצבת $x = y = 1$ בבינום ניוטון.

5.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

מוכיחים ע"י פתיחת הביטויים.

6.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

הוכחה: עלינו לבחור ועד שיש לו יו"ר. עבור צד ימין - ראשית נבחר את היו"ר, שאותו אפשר לבחור מבין כל האנשים, ולכן יש n אפשרויות. לאחר מכן נבחר k חברי ועד. מה זה בעצם k חברי ועד? k יכול להיות מספר כלשהו בין 1 ל-n-1 והביטוי 2^{n-1} אכן מסמן את כל תתי הקבוצות של $n-1$ - נסתכל עליו כמו על וקטור בינארי, כאשר אפשר לשים 1 עבור מישהו שנבחר ו-0 עבור מישהו שלא נבחר. צד שמאל יהיה בחירת k חברי הועד, כאשר k נע בין 1 ל-n, ומתוך k חברי הועד נבחר את היו"ר. לבחירת היו"ר יש k אפשרויות, ולבחירת k אנשים מתוך n יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות. ניתן להשתמש ב-5 לצורך הוכחה אלגברית:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \underbrace{=}_{see\ (2)} n \cdot 2^{n-1}$$

7.

$$\sum_{\text{k is even}} \binom{n}{k} = \sum_{\text{k is odd}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

הוכחה: נבחר תת קבוצה שמספר האיברים בה אי זוגי. את האיבר הראשון ניתן לבחור או לא לבחור, כנ"ל את השני וכולי (לכל אחד 2 אפשרויות), ועבור האיבר האחרון נשארת אפשרות אחת בלבד. סך כל מספר האפשרויות: 2^{n-1}. סך כל האפשרויות לבחור קבוצה כלשהי מתוך n איברים הוא 2^n ולכן נשארו לנו בדיוק 2^{n-1} אפשרויות לבחור קבוצה בעלת מספר איברים זוגי. הוכחה אלגברית: בהעברת האגף האמצעי לשמאלי ניתן לראות שמקבלים את הבינום של ניוטון כאשר איבר אחד חיובי, אחד שלילי וחוזר חלילה. מתקבל שזה אפס. כלומר, הם שווים. אם כך, לפי טענה 2 האומרת שסכומם הוא 2^n, ודאי שסכום כל אחד מהם הוא 2^{n-1}.

8. סכום כל שני איברים סמוכים במשולש פסקל שווה לאיבר שמתחתם.
הוכחה: נסתכל על כל המילים הבינאריות באורך n+1 שבהן k+1 אחדות (k קבוע). מספר המילים הוא מספר האפשרויות לבחור k+1 מתוך n+1 ולכן $\binom{n+1}{k+1}$. נפרק את הקבוצה הזו לשתי תת קבוצות בחלוקה זרה וממצה: תת הקבוצה הראשונה היא כל המילים הבינאריות באורך n+1 בעלות k+1 אחדות, כשהספרה הראשונה היא 1. מספר האפשרויות - עלינו לחלק k אחדות ב-n מקומות, ולכן - $\binom{n}{k}$. תת הקבוצה השניה היא כל המילים הבינאריות באורך n+1 בעלות k+1 אחדות, כשהספרה הראשונה היא 0. עלינו לחלק k+1 אחדות ב-n מקומות ולכן $\binom{n}{k+1}$. ההוכחה האלגברית לא ניתנה בשלמותה בכיתה והיא מייגעת.

9. כל שורה במשולש פסקל היא יוני מודאלית - האיברים גדלים עד למקסימום גלובלי (איבר אחד או שניים) ומשם קטנים. הוכחה:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \iff \frac{n-k+1}{k} > 1 \iff n+1 > 2k \iff k < \frac{n+1}{2}$$

10. באותו אופן ניתן להראות שהאיברים יורדים ממש אם $k > \frac{n+1}{2}$.

11. תכונת מקל הגולף - עבור אלכסון כלשהו של משולש פסקל, סכום האיברים בו הוא סכום האיבר בשורה התחתונה של המשולש שישלים את האלכסום לצורת מקל גולף. למשל:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = \binom{5}{2}$$

הוכחה: צד ימין הוא קבוצת המילים הבינאריות באורך l+1 שיש בהן r+1 אפסים בדיוק. צד שמאל: האיבר הראשון תמיד יהיה $\binom{r}{r}$ - מספר המילים הבינאריות באורך l+1 שיש בהן r+1 אפסים בדיוק, בהן האפס הקיצוני הימני מצוי במקום ה-r+1 (מה שמשאיר בדיוק אפשרות אחת לסידור). האיברים הבאים הם $\binom{r+i}{r}$ והם כל המילים הבינאריות הנ"ל אשר האפס הקיצוני הימני שלהן מצוי במקום ה-$r+1+i$. הוכחה נוספת היא באמצעות סריג פסקל. אחד הצמתים באלכסון k חייב להיות הצומת האחרון בו. ברגע שקבענו מיהו, יש רק דרך אחת להגיע לנקודה הסופית. סך כל הדרכים להגיע אליה היא סך כל הדרכים להגיע לכל נקודה באלכסון.

12. משפט עקרון ההכלה וההפרדה:

$$\underbrace{E_0}_{\text{no bad property}} = W\left(P_1' P_2' \dots P_k'\right) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot W(r)$$

כאשר

$$W(r) = \sum_{1 \le i \le j \le k} W\left(P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik}\right)$$

וכאשר $W(0)$ הוא כל האיברים.
הוכחה: איבר "טוב", שלא מקיים אף תכונה רעה, יספר פעם אחת בצד ימין ופעם אחת בצד שמאל, בגלל $W(0)$. איבר שמקיים $r > 0$ תכונות רעות לא יספר בצד שמאל, ובצד ימין הוא יספר כך:

- פעם אחת ב-$W(0)$.
- $-r$ פעמים ב-$W(1)$ (כל האיברים שמקיימים תכונה רעה אחת).

- $\binom{r}{2}$ פעמים ב-$W(2)$ (כל הזוגות של r התכונות הרעות).
- עבור $t \le r$, האיבר יספר $(-1)^t \binom{r}{t}$פעמים.

בסה"כ האיבר יספר $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}$ פעמים. הביטוי הזה הוא איברים זוגיים פחות אי זוגיים במשולש פסקל, ולפי תכונות משולש פסקל הוא אפס.

13. משפט האינדוקציה: תהי P_n תכונה שהיא פונקציה של מספר טבעי (תלויה במספר טבעי) $n \in \{\mathbb{N}, 0\}$ אמ"מ:

    (א) בסיס האינדוקציה P_0 מתקיים.

    (ב) צעד האינדוקציה - לכל $k > 0$, אם P_{k-1} מתקיים, אז P_k מתקיים.

הוכחה: בהינתן התנאים הנ"ל, נניח בשלילה שהתכונה P_n אינה מתקיימת לכל הטבעיים, לכן יש קבוצה לא ריקה S של טבעיים שלא מקיימים את התכונה. מאקסיומת האינדוקציה (אם S קבוצת טבעיים לא ריקה, יש בה איבר מינימלי) נובע של-S יש מינימום ונסמנו n. לפי הנחה א' לעיל ברור ש-$n > 0$. אם כך, קיבלנו מצב בו P_n לא מתקיים ל-n כלשהו אך P_{n-1} כן מתקיים, וזו סתירה לטענה ב'. ניתן להרחיב את המשפט כך שהצעד הוא התקדמות ב-2 (ויש להוכיח לחוד לזוגיים ולאי זוגיים) או יותר, וניתן גם להתחיל מבסיס שאינו 0 או 1. כמו כן ניתן להרחיב לאינדוקציה כפולה: הבסיס הוא נכונות $P_{0,0}$, ונכונות $P_{s,t}$ לכל $(s,t) < (m,n)$ גוררת נכונות $P_{m,n}$.

14. חלוקת r כדורים שונים ל-m תאים שונים ניתן לעשות ב-$CC_m^r \cdot r! = \binom{m+r-1}{r}$ דרכים שונות.
הוכחה: הבעיה שקולה לחלוקה ללא חשיבות לסדר ההכנסה של הכדורים, כפול הסדר הפנימי של הכדורים.

15. משפט אוילר (חלק א') - גרף סופי וקשיר הוא אוילרי מעגלי אמ"מ כל דרגות הצמתים הן זוגיות.
הוכחה: כיוון 1: נניח שהגרף הוא אוילרי מעגלי, ולכן יש בו מעגל אוילר. עבור צומת כלשהי בו, נתבונן בכל הקשתות שנכנסות אליה. חוגים עצמיים של הצומת יתנו לנו 2+ לדרגה, ועל כל קשת שנכנסת יש קשת שיוצאת מהצומת, מאחר וזה מעגל. לכן כל הדרגות זוגיות.
כיוון 2: נניח שכל הדרגות זוגיות. יהי P המסלול הארוך ביותר בגרף שאינו מכיל קשת יותר מפעם אחת. נסמנו $v_0 \overset{e1}{—} v_1 \overset{e2}{—} \dots \overset{el}{—} v_l$. תרומת חברי המסלול לדרגת הצומת האחרון היא אי זוגית, מאחר ונכנסים אליו ולא יוצאים. מצד שני, נתון שדרגתו זוגית, לכן יש להוסיף עוד קשת - סתירה להיות P המסלול הארוך ביותר. מאחר וכך, הצומת האחרון חייב להופיע בהתחלת המסלול ולכן זה מעגל. נניח בשלילה ש-P לא מכיל את כל הקשתות בגרף - יש לפחות אחת שלא נמצאת בו. נסמנה $x\ y$. אם הצומת x הוא על המסלול שלנו, אז הקשת כן על המסלול, ומאחר שדרגתו של y זוגית הטיפול הוא כמו קודם. נניח ש-x לא על P. הגרף קשיר ולכן יש דרך להגיע מ-v_0 ל-x. נניח ש-v_i הוא הצומת הראשון על המסלול ביניהם שנמצא על P. לכן יש קשת כלשהי שמחברת בין $v_0 - z$, כאשר z כבר לא על P.לכן אפשר להאריך את P, וזו סתירה להיותו הארוך ביותר.

16. משפט אוילר (חלק ב') - גרף G סופי וקשיר, אוילרי ולא מעגלי $\iff$ קיימים בדיוק 2 צמתים שדרגתם לא זוגית.
הוכחה: כיוון 1: נניח שיש מסלול אוילרי לא מעגלי. נסמן את הצמתים שבקצוות המסלול ב-t,s. נוסיף קשת חדשה לגרף שתחבר ביניהם. נקרא לגרף החדש 'G. הגרף הזה הוא אוילרי מעגלי, ולכן לפי חלק א' כל הדרגות בו זוגיות. הוספנו רק קשת אחת שתרמה 1 לשני צמתים בלבד, ולכן דרגתם בגרף המקורי אי זוגית.
כיוון 2: נסמן את הצמתים בעלי הדרגה האי זוגית כ-s,t. נוסיף לגרף קשת חדשה. זהו גרף עם דרגות זוגיות בכל הצמתים ולכן קיים בגרף זה מסלול אוילרי מעגלי. אם נוריד את הקשת החדשה, זהו מסלול אוילרי לא מעגלי.

17. גרף G הוא עץ $\iff$ G חסר מעגלים פשוטים מקסימלי $\iff$ ל-G אין חוגים עצמיים, ולכל 2 צמתים קיים מסלול פשוט יחיד ביניהם $\iff$ G קשיר מינימלי.
הוכחה 12: מאחר ו-G הוא עץ, הוא חסר מעגלים. נוכיח שהוספת קשת תקלקל את זה. עבור כל שני צמתים בגרף, מאחר והגרף קשיר, אם נחבר ביניהם קשת, ניצור מעגל.
הוכחה 23: נתון ש-G חסר מעגלים, נראה שלכל שני צמתים מסלול יש פשוט יחיד המחבר ביניהם. ניקח שני צמתים, x,y, ונניח שאין קשת המחברת ביניהם. לפי הנתון של חסר מעגלים מקסימלי, הוספת קשת תקלקל את זה. נוסיף את הקשת וניצור מעגל. ללא הקשת הזו עדיין יש מסלול, והוא חייב להיות פשוט כי נתון שהוא חסר מעגלים. נראה שהוא יחיד - אם קיימים שני מסלולים, או שאחד הוא חלק מהשני, ואז y מופיע גם באמצע המסלול וגם בסוף - מעגל, או שהם זרים. אם המסלולים זרים מתקבל מעגל - שני מסלולים שמתחילים ב-x ונפגשים ב-y או בצומת כלשהו לפניו יוצרים מעגל.

הוכחה 34: נתון שיש מסלול פשוט יחיד בין כל שני צמתים ולכן הגרף קשיר. נראה שהשמטת קשת תקלקל קשירות. נתבונן בקשת כלשהי בין שני צמתים. ודאי שלא ייתכן שהיא חוג עצמי, כי נתון, ומאחר ויש מסלול פשוט יחיד בין שני צמתים, אם נוריד קשת זו נקלקל אותו.
הוכחה 41: הקשירות נתונה, נראה שהוא חסר מעגלים. נניח שיש מעגל בגרף, ולכן אם נשמיט בו קשת, תמיד נוכל להגיע ליעדנו מהצד השני של המעגל. נתון שהשמטת קשת תקלקל את הקשירות - סתירה.

18. טענת היער והעלים - ביער סופי שבו יש קשת אחת לפחות, יש שני עלים לפחות.
הוכחה: נסתכל בקשת e. נגדיר את P בתור המסלול הארוך ביותר שעובר דרכה. מסלול זה אינו מעגל, מאחר וזה יער. לכן דרגות הצמתים בקצוות הן 1, אחרת ניתן להאריך את P.

19. עבור גרף סופי, $|V| = n$ - G עץ $\iff$ G חסר מעגלים ו-$|E| = n-1$ $\iff$ $|E| = n-1$ ו-G קשיר.
הוכחה 12: באינדוקציה. הבסיס הוא $n = 1$ - צומת אחת. בודאי שאין ב-G מעגלים, ומספר הקשתות הוא אפס. צעד: יש לפחות 2 צמתים. מאחר וזה עץ הוא קשיר, ולכן יש לפחות קשת אחת. מטענת היער והעלים ידוע שיש לפחות עלה אחד. נסלקו עם הקשת שלו ונקבל גרף חדש, שיש בו צומת אחת פחות וקשת אחת פחות, ולפי הנחת האינדוקציה זה נכון.
הוכחה 31: יש להראות שמדובר בעץ. נתון שהוא קשיר, נראה שהוא חסר מעגלים. נניח שיש בו מעגל, ולכן אפשר לנתק קשת כלשהי על המעגל והקשירות לא תפגע. כך נסיר קשתות עד שנגיע לגרף נטול המעגלים המינימלי. מאחר וזה עץ, לפי 12 נקבל שמספר הקשתות בו הוא $n-1$, ולכן לא הסרנו אף קשת, והגרף חסר מעגלים.

20. לכל מילה $w \in V^{n-2}$ קיים עץ יחיד T שמייצר אותה, וניתן לשחזר אותו ממנה.
הוכחה: באינדוקציה על n. הבסיס הוא n=2. המילה היא $w = \varnothing$ יש רק עץ אחד שמתאים וודאי שניתן לשחזר אותו מהמילה. הנחת האינדוקציה: לכל מילה $w' \in (V')^{n-3}$ כך ש-$|v'| = n-1$ קיים עץ יחיד T' מתאים.
צעד: מאחר ו-$|w| = n-2$ קיים צומת $x \in V$ מינימלי שאינו ב-w, ולכן דרגתו 1 בכל עץ שייצר את w - עלה מינימלי. לכן הוא מחובר לאות הראשונה של המילה. נגדיר $V' = V \backslash \{x\}$. ודאי ש-$|V'| = n-1$, לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים T' יחיד מתאים. נחבר את הצומת שהסרנו. זה עלה, אז לא סגרנו מעגל, לכן נוצר עץ. הוא נוצר באופן יחיד כי T' משוחזר ע"י המילה .

21. למת המתווך: לגרף מתווך, מכוון וסופי יש שורש.
הוכחה: נניח שאין. ניקח את תת הקבוצה הגדולה ביותר שיש לה שורש. אם זו קבוצת כל הצמתים - סיימנו. אחרת קיים איזשהו צומת x שאינו בתת הקבוצה. לתת הקבוצה יש שורש שנמצא בה ונסמנו y. מאחר והגרף מתווך, הרי שיש ל-x,y מתווך. נסמנו z. לכן אפשר להוסיף את z,x לתת הקבוצה תוך פגיעה במקסימליות שלה. סתירה.

22. גרף G הוא עץ מכוון $\iff$ ל-G יש שורש r כך שהמסלול ממנו לכל צומת הוא יחיד $\iff$ ל-G יש שורש וגם $d_{in}(r) = 0$, $d_{in}(v) = 1 \forall v \neq r$ $\iff$ ל-G יש שורש והשמטת כל קשת תקלקל את השורשיות $\iff$ גרף התשתיות של G קשור ול-G יש צומת יחיד עבורו מתקיים תנאי הדרגות.
הוכחה 12: מאחר ו-G עץ מכוון אז יש לו שורש. נראה יחידות. נניח שיש שני מסלולים מהשורש לצומת כלשהו. לכן יש שני מסלולים פשוטים לא מכוונים מהשורש לאותו צומת - סתירה למשפט שקילות עצים לא מכוונים.
הוכחה 23: יש להוכיח את תנאי הדרגות. עבור השורש, אם דרגת הכניסה שלו אינה 0, הרי שנכנסת אליו קשת מצומת אחר, ואז יש שני מסלולים מהשורש לעצמו - המסלול הריק והמסלול דרך אותו צומת. סתירה ליחידות המסלול מהשורש לכל צומת. עבור שאר הצמתים - דרגת הכניסה היא 1 מאחר ויש מסלול יחיד מהשורש לצומת כלשהו. אם לצומת כלשהו נכנסות שתי קשתות, הרי שאפשר להגיע אליו משני צמתים שונים.
הוכחת 34: מאחר ונתון שיש שורש ונתון תנאי הדרגות, אם נשמיט קשת כלשהי xy ולא נקלקל את השורשיות, הרי שיש עוד קשת שנכנסת ל-x - סתירה לנתון.
הוכחה 45: נראה שגרף התשתיות קשיר: מאחר ובגרף המכוון ניתן להגיע מהשורש לכל צומת, הרי שאם נוריד את הכיווניות של הקשתות, ודאי שנוכל להגיע מכל צומת לכל צומת. נראה שתנאי הדרגות מתקיים עבור צומת יחיד: אם יש עוד צומת שדרגת הכניסה שלו 0, הרי שאז r המקורי אינו שורש - לא יכול להגיע לשם. לכן אם יש שורש, זה r. כדי שזה אכן יהיה שורש, עבור כל שאר הצמתים בהכרח $d_{in} > 0$. אם $d_{in} \geq 2$, השמטת קשת לא תקלקל את השורשיות, ולכן מתקיים תנאי הדרגות עבור השורש r.

23. יהי G גרף מכוון וסופי. G הוא עץ מכוון $\iff$ גרף התשתיות שלו חסר מעגלים וקיים צומת יחיד עבורו מתקיים תנאי הדרגות.
הוכחה - כיוון 1: אם G עץ מכוון, בפרט גרף התשתיות שלו הוא עץ וחסר מעגלים. ממשפט 20 מתקיימת יחידות

השורש.
הוכחה - כיוון 2: נראה שיש שורש. ניקח צומת x, $d_{in}(x) = 1$. יש צומת כלשהו שנכנס ל-x, וכך הלאה. הסדרה חייבת להיות סופית - נתון- ולכן היא נעצרת. הצומת הראשון בסדרה זו הוא השורש.

24. למה: לכל גרף מכוון בעל שורש r יש עץ פורש מכוון ששורשו r.
הוכחה: נבחר צומת כלשהו בגרף המכוון ונסתכל על המסלול מהשורש אליו. אם יש כמה מסלולים, נבחר אחד. את הקשת שנכנסת ל-x מהצומת שלפניו נוסיף לגרף הפורש. כך נעשה עבור כל צומת בגרף.

25. טענה: $H(V, E')$ הוא עץ פורש של $G(V, E)$ ששורשו r. עבור H מתקיים תנאי הדרגות כי כך בנינו אותו. לכל צומת לקחנו קשת אחת שנכנסת אליו, ול-r יש דרגת כניסה 0. נראה שהוא שורש באינדקוציה - לכל צומת x כך שהמסלול המינימלי מ-r ל-x ב-G הוא באורך l יש מסלול תואם ב-H.

26. למת האינסוף של קנינג: יהי G גרף מכוון אינסופי עם שורש r. דרגת היציאה של כל צומת סופית. אזי יש ב-G מסלול אינסופי שמתחיל ב-r.
הוכחה: יהי T עץ פורש כלשהו של G עם שורש r. נבנה מסלול אינסופי. r יהיה v_0, ו-v_1 יהיה הצומת שמגיעים אליו מ-r, שיוצאים ממנו אינסוף צאצאים. v_{i+1} יהיה בן של v_i שיש לו אינסוף צאצאים.

27. גרף G מכוון, סופי וללא חוגים עצמיים. G עץ מכוון עם שורש r $\iff$ $D(r, r) = 0$, $D(x, r) = 1 \forall x \neq r$, וגם $det(D_{rr}) = 1$.
הוכחה: נתון ש-$D(r, r) = 0$- תנאי הדרגות. נבחר לסמן את הצמתים כך שאם יש קשת $i \to j$ אז $i < j$. אחרי מספור r, נמספר את הצמתים שרחוקים ממנו מרחק 1, ואז מרחק 2 וכו'.

- כלל יצירה של Dearrangments - $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$.
- מספר סטירלינג מסדר שני - מספר הפתרונות לבעית חלוקת r כדורים שונים ל-m תאים זהים, כאשר אין תאים ריקים. מסומן $S(r.m)$.
- מספר היערות המסודרים עם k צמתים = מספר העצים המסודרים עם k+1 צמתים. הוספת שורש ליער זו העתקה חח"ע מיער לעץ.